Lösungen für kleine Wellenlängen, d. h. große k, instabil werden, bis schließlich für $B^z=0$ das oben diskutierte Verhalten eintritt. LUNDQUIST [3] hat für inkompressibles Plasma gezeigt, daß bei vorhandenem Magnetfeld in z-Richtung ein Hinzufügen eines Magnetfeldes in der φ-Richtung zur Instabilität beiträgt. Er bewies, daß für seine angenommene Verschiebung Instabilität herrscht, wenn für das Feld im Innern des Plasmazylinders gilt

$$\int_0^R (B^\varphi)^2\, r\, \mathrm{d}r > 2 \int_0^R (B^z)^2\, r\, \mathrm{d}r\,.$$

Er kann nicht zeigen, daß, wenn diese Ungleichung nicht erfüllt ist, Stabilität vorliegt, da er seine Verschiebungen nicht minimalisiert.

Aus dem Obigen geht hervor, daß eine zylindersymmetrische Plasmakonfiguration ohne Magnetfeld im Innern des Plasmas, die also nur durch Oberflächenströme zusammengehalten wird, stets instabil ist, wenn eine azimutale Komponente des Magnetfeldes existiert. Analog wie bei TAYLER [4] sind auch hier die Störungen kleiner Wellenlängen am instabilsten.

Die Bewegung geladener Teilchen in rotations-symmetrischen Magnetfeldern

Von R. LÜST und A. SCHLÜTER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **12 a**, 841—843 [1957]; eingegangen am 11. Juni 1957)

Die Bewegung geladener Teilchen in rotations-symmetrischen Magnetfeldern wird untersucht. In diesem Fall kann man aus einer Verallgemeinerung des Drehimpulserhaltungssatzes bestimmte Bedingungen ableiten, unter welchen die Teilchen in einem endlichen Volumen für unbegrenzte Zeit festgehalten werden.

The motion of a charged particle in a magnetic field of rotational symmetry allows for a generalization of the law of conservation of angular momentum. From this conditions are derived, under which a particle will always stay within a finite volume.

a) Will man ein Plasma durch Magnetfelder einschließen, so genügt es für viele Fragen, das Plasma makroskopisch durch eine Flüssigkeit zu beschreiben und die daraus folgenden Bedingungen zu untersuchen. Mikroskopisch gesehen, geschieht das Festhalten des Plasmas durch ein Magnetfeld dadurch, daß die Teilchen um die Magnetfeldlinien spiralen. Für die genauere Untersuchung, inwieweit die Teilchen durch ein Magnetfeld zusammengehalten werden, und ob sie aus einem vorgegebenen Volumen entweichen können, muß man die Bahn der einzelnen Teilchen betrachten.

Im folgenden soll die Frage untersucht werden, durch welche zylindersymmetrischen Magnetfelder es möglich ist, Teilchen innerhalb eines geschlossenen Volumens festzuhalten. Von STÖRMER sind die Bahnen von geladenen Teilchen in einem Dipolfeld untersucht worden. Diese Berechnungen wurden später von den Verfassern fortgesetzt und man kann sehen, daß die hier zu untersuchende Frage sich in sehr analoger Weise behandeln läßt.

b) Ein zylindersymmetrisches Magnetfeld $\mathfrak{B}$ läßt sich in ein toroidales (oder azimutales) Feld und in ein meridionales Feld zerlegen. Der meridionale Anteil kann dabei beschrieben werden durch eine skalare Funktion $F(s,z)$, (s = Abstand von der z-Achse als Symmetrieachse, z = Abstand von der Äquatorebene), wobei $2\pi F(\mathfrak{r})$ den gesamten Fluß bedeutet durch die Fläche, deren Begrenzung durch die Rotation des Punktes $\mathfrak{r}$ um die Symmetrieachse entsteht ($\mathfrak{r}$ = Ortsvektor). Auch der toroidale Feldanteil läßt sich durch eine skalare Funktion $T(s,z)$ beschreiben, die analoge Bedeutung wie F für die elektrische Stromdichte hat.

Durch die beiden Funktionen F und T drückt sich das Magnetfeld wie folgt aus, wenn $\mathfrak{e}_z$ der Einheitsvektor in Richtung der Symmetrieachse ist,

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\mathrm{m} + \mathfrak{B}_\mathrm{t} = \frac{1}{s^2}\left[[\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}_z]\,\mathrm{grad}\,F\right] + \frac{1}{s^2}\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}_z]\,T\,. \quad (1)$$

Die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens mit der Ruhemasse m_0, der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und der Ladung $Z e$ (e = Elementarladung, Z = Anzahl der Elementarladungen) in einem Magnetfeld ist gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{Z e}{c}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\,. \quad (2)$$

Hierin ist $\mathfrak{p}$ der Impuls

$$\mathfrak{p} = m\,\mathfrak{v} = \frac{m_0\,\mathfrak{v}}{\sqrt{1-(\mathfrak{v}/c)^2}}, \tag{3}$$

c die Lichtgeschwindigkeit und t die Zeit. Die Geschwindigkeit ist definiert als

$$\mathfrak{v} = \mathrm{d}\mathfrak{r}/\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Multipliziert man Gl. (2) skalar mit $\mathfrak{p}$, so sieht man, daß

$$|\mathfrak{p}| = \text{const} \quad \text{und} \quad |\mathfrak{v}| = \text{const} \tag{5}$$

ist während der Bewegung des Teilchens; und das gleiche gilt dann auch für die bewegte Masse m, so daß man für Gl. (2) schreiben darf:

$$m\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{Z\,e}{c}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]. \tag{6}$$

c) Multipliziert man Gl. (6) skalar mit $[\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}_z]$, so bekommt man die Verallgemeinerung des Drehimpulserhaltungssatzes. Es ist

$$\left([\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}_z]\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{Z\,e}{m\,c}\,([\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}_z][\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]). \tag{7}$$

Nun ist der Absolutbetrag der toroidalen Geschwindigkeitskomponente $\mathfrak{v}_t$ gegeben durch

$$|\mathfrak{v}_t| = \frac{(\mathfrak{v}[\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}_z])}{s}; \quad s = |[\mathfrak{e}_z\,\mathfrak{r}]| \tag{8}$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(s\,|\mathfrak{v}_t|) = \left([\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}_z]\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t}\right) + (\mathfrak{v}[\mathfrak{e}_z\,\mathfrak{v}]) = \left([\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}_z]\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t}\right). \tag{9}$$

Aus Gl. (7) wird dann unter Benutzung von Gl. (1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(s\,|\mathfrak{v}_t|) = \frac{Z\,e}{m\,c}\,(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,F). \tag{10}$$

Da F nicht explizit von der Zeit abhängen soll, kann man dafür schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(s\,|\mathfrak{v}_t|) = \frac{Z\,e}{m\,c}\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}. \tag{11}$$

Diese Gleichung läßt sich direkt integrieren und liefert

$$\pm\,\mathfrak{v}_t = \left(\frac{Z\,|e|}{m\,c}\,F + 2\,\gamma\right)\frac{[\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}_z]}{s^2}. \tag{12}$$

Das obere Vorzeichen gilt für positiv geladene Teilchen und das untere für negativ geladene. $2\,\gamma$ ist eine Integrationskonstante, die so normiert ist, daß $\pm\,2\,\gamma$ die Drehimpulskomponente parallel zur Symmetrieachse ist, wenn und wo die Funktion F verschwindet. $2\,\gamma$ ist also konstant längs der Bahn eines einzelnen Teilchens. Bemerkenswert an dieser Gl. (12) ist, daß nur der meridionale Feldanteil eingeht.

Multipliziert man Gl. (6) skalar mit $\mathfrak{v}$, so erhält man den Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}^2}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{13}$$

Unter Einführung der meridionalen Geschwindigkeitskomponente $\mathfrak{v}_m$ wird daraus, da $\mathfrak{v}_m$ und $\mathfrak{v}_t$ senkrecht aufeinander stehen:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}_m^2}{\mathrm{d}t} = -\,\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}_t^2}{\mathrm{d}t}. \tag{14}$$

Wenn man nun $\mathfrak{v}_t$ nach Gl. (12) als Funktion des Ortes (und des Parameters $2\,\gamma$) ausgedrückt denkt, ist dies gleichwertig mit:

$$\left(\mathfrak{v}_m\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}_m}{\mathrm{d}t}\right) = -\,\tfrac{1}{2}(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{v}_t^2). \tag{15}$$

Nun liegt $\mathrm{grad}\,\mathfrak{v}_t^2$ in der Meridianebene, so daß man dafür schreiben kann:

$$\left(\mathfrak{v}_m\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}_m}{\mathrm{d}t}\right) = -\,\tfrac{1}{2}(\mathfrak{v}_m\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{v}_t^2). \tag{16}$$

Damit ist die Komponente $\mathrm{d}\mathfrak{v}_m/\mathrm{d}t$ in Richtung von $\mathfrak{v}_m$ selbst bestimmt. Um den gesamten meridionalen Anteil von $\mathrm{d}\mathfrak{v}_m/\mathrm{d}t$ zu erhalten, multiplizieren wir Gl. (16) noch skalar mit $\mathfrak{e}_z$. Man bekommt dann, da $\mathrm{d}\mathfrak{v}_t/\mathrm{d}t$ senkrecht auf $\mathfrak{e}_z$ steht,

$$\left(\mathfrak{e}_z\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}_m}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{Z\,e}{m\,c}\left\{(\mathfrak{v}_t[\mathfrak{B}_m\,\mathfrak{e}_z]) + (\mathfrak{e}_z[\mathfrak{v}_m\,\mathfrak{B}_t])\right\}. \tag{17}$$

Mit Hilfe von Gl. (1) wird daraus

$$\left(\mathfrak{e}_z\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}_m}{\mathrm{d}t}\right) = -\,\tfrac{1}{2}(\mathfrak{e}_z\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{v}_t^2) + \frac{1}{s^2}\left(\mathfrak{e}_z\left[\mathfrak{v}_m[\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}_z]\right]\right)T. \tag{18}$$

Die toroidale Komponente von $\mathrm{d}\mathfrak{v}_m/\mathrm{d}t$ folgt aus der Drehung der Meridianebene, in der sich das Teilchen befindet. Wenn $\mathfrak{e}_s$ der Einheitsvektor in der s-Richtung ist, gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{e}_s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{s}\,\mathfrak{v}_t. \tag{19}$$

Damit bekommt man schließlich

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}_m}{\mathrm{d}t} = -\,\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{v}_t^2 + \frac{1}{s^2}\left[\mathfrak{v}_m[\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}_z]\right]T + \frac{1}{s}\,(\mathfrak{v}_m\,\mathfrak{e}_s)\,\mathfrak{v}_t. \tag{20}$$

Die toroidale Komponente des Magnetfeldes hat also nur auf die Bewegung in der Meridianebene einen Einfluß.

d) Bei den Bewegungen geladener Teilchen in einem Dipolfeld konnte man durch die Benutzung des Drehimpuls- und des Energiesatzes zeigen, daß für Teilchen bestimmter Energie und mit bestimmten Drehimpulskomponenten 2γ sogenannte verbotene Gebiete existieren, die diese Teilchen nicht verlassen bzw. nicht erreichen können. Solche Gebiete lassen sich auch hier angeben.

Die Gebiete, die die Teilchen bestimmter Geschwindigkeit $|\mathfrak{v}|$ und mit bestimmter Drehimpulskomponente 2γ nicht verlassen können, bestimmen sich daraus, daß

$$|\mathfrak{v}_t| \leqq |\mathfrak{v}| \tag{21}$$

sein muß. Damit folgt aus (Gl. 12)

$$\frac{1}{s}\left|\frac{Z\,|e|}{m\,c} F(s,z) + 2\gamma\right| \leqq |\mathfrak{v}|\,. \tag{22}$$

Für vorgegebene $|\mathfrak{v}|$ und 2γ, die ja während der Bewegung eines Teilchens konstant sind, läßt sich daraus das Gebiet, in das die Teilchen eingeschlossen sind, ermitteln.

Wenn wir ein Teilchen mit der toroidalen Geschwindigkeitskomponente $\mathfrak{v}_t$ (deren einzige Komponente in Zylinderkoordinaten v_φ positiv sei, wenn $\mathfrak{v}_t$ in Richtung $[\mathfrak{e}_z\,\mathfrak{r}]$ zeigt, andernfalls negativ) im Punkte s_0, z_0 treffen, können wir zunächst den Wert des verallgemeinerten Drehimpulses 2γ nach Gl. (12) bestimmen zu

$$2\gamma = -\frac{Z\,|e|}{m\,c} F(s_0, z_0) - s_0\, v_\varphi(s_0, z_0)$$

und damit die Linie, die die Grenze des Bereiches angibt, als die Gesamtheit der Punkte s, z, in denen die aus Gl. (22) folgende Beziehung erfüllt ist:

$$F(s,z) - F(s_0,z_0) = \frac{m\,c}{|e|\,Z}\,(s_0\, v_\varphi(s_0\, z_0) \pm s\,|v|)\,.$$

In den Punkten, in denen $s\,\mathfrak{B}_m$ endlich ist, ergeben sich, jedenfalls für genügend kleines v, zwei Kurven als Lösungen, die entlang der Feldlinie von $\mathfrak{B}_m$ durch den Punkt s_0, z_0 verlaufen. Diesen Streifen zwischen den beiden Kurven können die Teilchen nicht verlassen. Im Grenzfall $v \to 0$ ist seine Breite an einer Stelle, wo $\mathfrak{B}_m$ einen bestimmten Wert besitzt, durch den Durchmesser des Gyrationskreises des Teilchens in dem Magnetfeld $\mathfrak{B}_m$ bestimmt. Da in nichtsingulären Feldern die Feldlinien von $\mathfrak{B}_m$ entweder geschlossen sind, oder ins Unendliche verlaufen, ergeben sich (noch immer unter der Voraussetzung nicht zu großer Geschwindigkeit v) im ersten Falle geschlossene ringartige Gebiete, die jeweils für Teilchen bestimmter Anfangsbedingungen in der Meridianebene erlaubt sind. Die erlaubten Gebiete im Raum folgen daraus durch Rotation um die z-Achse.

Jedes Feld mit einem meridionalen Anteil, dessen Feldlinien geschlossen sind, kann also Teilchen nicht zu hoher Energie dauernd in einem endlichen Volumen festhalten.

Wenn man ein Plasma hoher Temperatur durch ein Magnetfeld festhalten will, so ist eine makroskopische Beschreibung des magnetohydrodynamischen Gleichgewichts nicht hinreichend, wenn die freien Weglängen groß gegen die linearen Dimensionen des Volumens werden, in dem das Plasma festgehalten werden soll. Man muß dann die Bahnen der einzelnen geladenen Teilchen verfolgen und solche Feldkonfigurationen finden, daß die Teilchen genügend lange in dem Volumen bleiben. Das vorgeführte Ergebnis erlaubt die Bestimmung von solchen Konfigurationen. Es ist klar, daß insbesondere die Frage der Stabilität noch nicht gelöst ist, da wir die mögliche Rückwirkung der geladenen Teilchen auf das elektromagnetische Feld nicht betrachtet haben.